# Aufgabe1: Geraden im $\mathbb{R}^2$



Gegeben sind die Punkte A(-2 | 1), B(8 | 3), C(3 | 2) und D(5 | -1).

a) Stelle die Gleichungen für die Geraden $g_1$=AB, $g_2$=BC und $g_3$=CD auf.

b) Untersuche die gegenseitige Lage der 3 Geraden $g_1$, $g_2$ und $g_3$ und bestimme soweit vorhanden die Schnittpunkte.

c) Ermittle für jede der Geraden die Koordinatenform.

d) Untersuche nun mit Hilfe der Koordinatenformen die gegenseitige Lage der 3 Geraden und berechne wieder mögliche Schnittpunkte.

e) Berechne die Spurpunkte der Geraden $g_1$ und $g_3$ mit den Koordinatenachsen.

f) Berechne den Schnittwinkel der Geraden $g_1$ und $g_3$.

g) Berechne die Schnittwinkel der Geraden $g_1$ und $g_3$ mit den Koordinatenachsen.

**Lösungen**

a) Aufstellen der Geradengleichungen mit der 2-Punkte-Form

$g_1$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$ $g_2$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ $g_3$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) Lage von $g_1$ und $g_2$:

1. Betrachte die Richtungsvektoren: es ist $\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$ = -2$\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow g_1 \parallel g_2$
2. Betrachte den Differenzenvektor $\vec{b} - \vec{a}$ der Aufhängepunkte: $\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$ = Richtungsvektor von $g_1$

   $\Rightarrow g_1 = g_2$ , d. h. die Geraden fallen zusammen.

Lage von $g_1$ und $g_3$:

1. Betrachte die Richtungsvektoren: es ist $\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow g_1$ und $g_2$ schneiden sich
2. Berechnung des Schnittpunktes S:

   Gleichsetzen der Geradengleichungen: $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

   liefert das Gleichungssystem: $\begin{array}{ll} \text{I} & 10l - 2n = 5 \\ \text{II} & 2l + 3n = 1 \end{array} \Rightarrow l = 0{,}5;\ n = 0$

   Einsetzen von z. B. n = 0 in $g_3$ liefert den Schnittpunkt S(3 | 2) , also S = C.

Lage von $g_2$ und $g_3$:

Da $g_1 = g_2$ schneiden sich $g_2$ und $g_3$ ebenfalls in S(3 | 2).

c) Aufstellen der Koordinatenformen durch Elimination des Parameters:

$g_1$: $\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 = -2 + 10l \\ \text{II} & x_2 = \phantom{-}1 + \phantom{1}2l \end{array} \xrightarrow{\text{I}-5\text{II}} x_1 - 5x_2 = -7 \Rightarrow$ Koordinatenform von $g_1$: $x_1 - 5x_2 + 7 = 0$.

$g_2$: Koordinatenform von $g_2$: $x_1 - 5x_2 + 7 = 0$

$g_3$: $\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 = 3 + 2n \\ \text{II} & x_2 = 2 - 3n \end{array} \xrightarrow{3\text{I}+2\text{II}} 3x_1 + 2x_2 = 13 \Rightarrow$ Koordinatenform von $g_3$: $3x_1 + 2x_2 - 13 = 0$.

d) Lage von $g_1$ und $g_2$ mit Hilfe der Koordinatenform:

Gleiche Koordinatenformen $\Rightarrow$ Geraden fallen zusammen

Lage von $g_1$ und $g_3$:

Die beiden Koordinatenformen stellen zusammen ein Gleichungssystem mit 2 Unbekannten $x_1$ und $x_2$ dar

$\Rightarrow$ Gleichungssystem auf bekannte Art lösen $\Rightarrow$ eindeutige Lösung $\Rightarrow$ Schnittpunkt S (3 | 2)

Falls z. B. $g_1$ in Parameterform und $g_3$ in Koordinatenform gegeben sind, so setzt man die Komponenten $x_1$ und $x_2$ von $g_1$ in $g_3$ ein und erhält einen Wert für den Parameter l. Daraus ergibt sich S. Also:

$g_1$ in $g_3$: $3(-2 + 10l) + 2(1 + 2l) - 13 = 0 \Rightarrow -6 + 30l + 2 + 4l - 13 = 0 \Rightarrow 34l = -17 \Rightarrow l = -2$

l in $g_1$ $\Rightarrow$ S( 3 | 2)

e) Spurpunkte mit den Koordinatenachsen

Allgemein gilt, dass jeweils der $x_1$ bzw. $x_2$-Wert 0 sein muss, damit ein Punkt auf einer der Koordinatenachsen liegt.

Spurpunkte von $g_1$:

mit $x_1$-Achse: $\Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow 1 + 2l = 0 \Rightarrow l = -0{,}5$

jetzt l in $g_1$: $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{S_1(-7 \mid 0)}}$

mit $x_2$-Achse: $\Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow -2 + 10l = 0 \Rightarrow l = 0{,}2$

jetzt l in $g_1$: $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{S_2(0 \mid 1{,}4)}}$

Kontrolliere an Hand der Zeichnung!

Spurpunkte von $g_3$:

mit $x_1$-Achse: $\Rightarrow \underline{\underline{S_3(4\frac{1}{3} \mid 0)}}$ ; mit $x_2$-Achse: $\Rightarrow \underline{\underline{S_4(0 \mid 6{,}5)}}$

f) Schnittwinkel zwischen $g_1$ und $g_3$:

Betrachte den Winkel zwischen den Richtungsvektoren der Geraden. Es ist:

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{20 - 6}{\sqrt{10^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{14}{\sqrt{104} \cdot \sqrt{13}} = 0{,}3807 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\varphi = 67{,}6°}}$$

g) Schnittwinkel mit Koordinatenachsen:

<u>$g_1$ mit $x_1$-Achse</u>: Gleichung der $x_1$-Achse: $\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

somit $\cos\alpha_1 = \dfrac{\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{10}{\sqrt{104} \cdot 1} = 0{,}9806 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha_1 = 11{,}3°}}$

<u>$g_1$ mit $x_2$-Achse</u>: Gleichung der $x_2$-Achse: $\vec{x} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

somit $\cos\alpha_2 = \dfrac{\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{2}{\sqrt{104} \cdot 1} = 0{,}1961 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha_2 = 78{,}7°}}$

entsprechend für $g_2$: $\underline{\underline{\alpha_3 = 56{,}3°}}$; $\underline{\underline{\alpha_4 = 33{,}7°}}$